

Mozgalice na vagi



Zadatak 1.



Julija ima 3 stare kovanice. Zna da je jedna od njih lažna i teža od preostale dvije.

Kako ona može otkriti koja je kovаницa lažna ako vagu može koristiti samo jednom?

Rješenje

Julija treba staviti jednu kovanicu na jednu stranu, a drugu na drugu stranu vase.

Ako vaga pokazuje da su jednake težine, onda je ona treća kovanica lažna.

A ako vaga pokazuje da je jedna od ovih dviju kovanica teža, onda je upravo ta lažna.

Zadatak 2.



Zlatar ima 9 prstenova koji jednako izgledaju.
Svi su jednako teški, osim jednoga koji je teži od
ostalih.
Kako će zlatar otkriti koji je prsten teži ako vagu
može koristiti samo dva puta?

Rješenje

Zlatar će staviti 3 prstena s jedne strane i 3 s druge strane vase.

Ako je vaga u ravnoteži, onda se traženi prsten nalazi među preostala 3 (koja nisu na vagi); a ako vaga nije u ravnoteži, onda je traženi prsten među ona 3 koja su teža.

Dakle, nakon prvog vaganja saznat će među koja je 3 prstena traženi lažni prsten.

Nakon toga postupit će kao u rješenju 1. zadatka.

Zadatak 3.



Arheolog ima 27 starih kovanica. Zna da je među njima jedna lažna i da je ona teža od ostalih. Može li on otkriti koja je kovanica lažna koristeći vagu samo 3 puta?

Rješenje

Arheolog može podijeliti ovih 27 kovanica u 3 skupine od po 9 kovanica.

Pri prvom vaganju na svaku stranu vase stavi po 9 kovanica. Time će nakon 1. vaganja saznati među kojih se 9 kovanica nalazi lažna.

Nakon toga nastaviti će kao u rješenju 2. zadatka.

Zadatak 4.



Četiri bisera imaju jednak izgled i veličinu. Janica zna da jedan biser ima drugačiju težinu od ostalih, ali ne zna je li on teži ili lakši. Možeš li pomoći Janici da nađe lažni biser? Vagu možeš koristiti samo dva puta.

Rješenje

Prvo na svaku stranu vase stavimo po jedan biser.

1. Ako su oba jednak teška, oba su prava.

Tada možemo usporediti i treći biser sa pravim biserom na vagi. Ako su težine jednake, lažni je četvrti. Ako težine nisu jednake, lažni je treći.

2. Ako prva dva bisera nisu jednak težine, onda je lažni biser među njima, pa su treći i četvrti biser sigurno pravi.

Stavimo na vagu npr. prvi i treći biser. Ako su jednak teški, tada je drugi biser lažni. Ako nisu jednak teški, tada je prvi biser lažni.

Zadatak 5.



Marko ima 75 sličnih prstenova. Svi su jednako teški, osim jednoga (lažnoga), no za njega ne zna je li teži ili lakši od ostalih.

Može li Marko otkriti je li lažni prsten lakši ili teži od ostalih ako vagu može koristiti dva puta?
(Nije potrebno otkriti KOJI prsten je lažan.)

Rješenje

Marko treba podijeliti prstenove u 3 jednakobrojne grupe. Na jednu stranu vage treba staviti prvih 25 prstenova, a na drugu stranu vage drugih 25.

1. Ako su te grupe jednako teške, onda u njima nema lažnog prstena, pa jednostavno usporedimo težinu treće grupe (u kojoj je lažni prsten) s težinom bilo koje od prve dvije grupe. Ako je treća grupa teža, onda je i lažni prsten teži. U suprotnom je lakši.
2. Ako prve dvije grupe nisu jednako teške, onda je u jednoj od njih lažni prsten, a u trećoj grupi su sigurno svi pravi. Usporedimo težinu treće grupe sa težinom teže od prvih dviju grupa. Ako će njihove težine biti jednakе, onda je lažni prsten u lakšoj grupi, pa je i on lakši od ostalih. U suprotnom je teži.

Zadatak 6.



Na raspolaganju su utezi od:

1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g.

Marija ima 31 bombon, svaki težak 1 g.

Dokaži da ona koristeći navedene utege može uravnotežiti vagu na čijoj se jednoj strani nalazi bilo koji broj bombona (od 1 do 31).

Rješenje

Očito je kako ćemo uravnotežiti 1, 2 ili 3 bombona. Kad dodamo uteg od 4 g, na iste načine možemo uravnotežiti 4, 5, 6 ili 7 bombona.

Ako tim kombinacijama dodamo i uteg od 8 g, time ćemo uravnotežiti od 8 do 15 bombona.

A dodatkom utega od 16 g uravnotežit ćemo i sve ostale mogućnosti.

Zadatak 7.



Na raspolaganju su utezi od:

1 g, 3 g, 9 g, 27 g, 81 g.

Petar ima 121 čokoladicu. Svaka je teška 1 g.

On može stavljati čokoladice samo na lijevu stranu vase, a utege na obje strane.

Dokaži da on na taj način može uravnotežiti bilo koji broj čokoladica koji će staviti na lijevu stranu vase.

Rješenje

Ako Petar na lijevu stranu vage stavi 1, 2, 3 ili 4 čokoladice, njih lako može uravnotežiti koristeći utege od 1 g i 3 g.

Uteg od 9 g omogućit će mu uravnoteživanje od 5 do 13 čokoladica, i to na sljedeći način: Ako na lijevu stranu stavi 5-13 čokoladica, a na desnu uteg od 9 g, onda je taj uteg teži ili lakši od lijeve strane za 0-4 g, a to se može uravnotežiti na gore već opisani način (pomoću utega od 1 g i 3 g). Dakle, koristeći utege od 1 g, 3 g i 9 g možemo uravnotežiti od 1 do 13 čokoladica.

Ako se na lijevu stranu stavi od 14 do 40 čokoladica, a na desnu uteg od 27 g, onda je razlika u njihovim težinama od 0-13 g, a kao što smo gore vidjeli, to se može uravnotežiti sa utezima od 1 g, 3 g i 9 g.

Na sličan način, koristeći još i uteg od 81 g, uravnotežiti možemo bilo koji broj čokoladica od 41-121.

Zadatak 8.



Dario ima pakovanje od 9 kg sjemena trave.
Za svoju livadu treba 2 kg.
Na raspolaganju mu je vaga i uteg od 200 g.
Može li on iz 9 kg sjemena izdvojiti točno 2 kg
ako vagu može koristiti samo 3 puta?

Rješenje

- Dario treba staviti uteg od 200 g na lijevu stranu vase, a zatim rasporediti 9 kg sjemena tako da vaga bude u ravnoteži. Time će imati 4.4 kg sjemena na lijevoj i 4.6 kg na desnoj strani vase.
- Zatim 4.4 kg jednostavno rasporedi na vagu tako da bude uravnoteži. Time će na svakoj strani imati 2.2 kg.
- Nakon toga na lijevu stranu vase stavi uteg od 200 g, a na desnu iz jedne skupine od 2.2 kg izdvoji sjeme kojim će to uravnotežiti. Time će mu u toj skupini ostati 2 kg sjemena.

Zadatak 9.



Ana ima 4 slične dinje.

Kako ih vagati da bi ih poredala od najteže do najlakše?

Vagu može koristiti 5 puta.

Rješenje

Podijelimo dinje u dvije skupine - po dvije dinje u svakoj skupini.

U prvom vaganju usporedimo dinje iz 1. skupine.

Označimo s **a** težinu teže dinje, a s **b** težinu lakše, **a>b**.

U drugom vaganju usporedimo dinje iz 2. skupine.

Označimo s **c** težinu teže dinje, a s **d** težinu lakše, **c>d**.

Sad usporedimo težu dinju iz 1. s težom dinjom iz 2. skupine. Imamo dvije mogućnosti:

1.) Ako je **a>c**, tada je **a>c>d**, pa nam preostaje još samo da **b** usporedimo s **c** i **d**, a za to su nam dovoljna još dva preostala vaganja.

2.) Ako je **c>a**, onda je **c>a>b**, pa nam preostaje da **d** usporedimo s **a** i **b**, a za to su nam također dovoljna dva preostala vaganja.

Zadatak 10.



U pakovanju se nalaze 24 kg šećera.

Možemo li izdvojiti 9 kg šećera koristeći vagu samo tri puta (bez korištenja utega)?

Rješenje

Možemo.

1. vaganje: Podijelimo 24 kg šećera na dva jednaka dijela - svaki će imati 12 kg.

2. vaganje: Sad podijelimo 12 kg šećera na dva jednaka dijela - svaki će imati 6 kg.

3. vaganje: Konačno, podijelimo i 6 kg šećera na dva jednaka dijela - svaki će imati 3 kg.

Sad uzmimo 6 kg šećera koji su nam preostali iz drugog vaganja i 3 kg šećera iz trećeg - oni zajedno čine 9 kg šećera.

Zadatak 11.



Arheolog ima 101 staru kovanicu. Zna da je među njima jedna lažna i da je njezina težina drugačija od težine ostalih (a sve ostale su međusobno jednakih težina).

Može li on otkriti je li lažna kovanica lakša ili teža od ostalih, ako mu je dopušteno da samo dva puta koristi vagu?

Rješenje

Može. Naime, kovanice treba podijeliti u 3 grupe: od 33, 33 i 35 kovanica (grupe **a**, **b** i **c**). Nakon toga prvo treba usporediti grupe **a** i **b** pomoću vase.

- Ako su one jednak teške, tada su sve kovanice u njima prave (a ima ih 66). Uzmemo bilo kojih 35 ispravnih kovanica i stavimo ih na jednu stranu vase, a na drugu stranu grupu **c** (u kojoj je lažna kovanica). Ako je grupa **c** teža, onda je i lažna kovanica teža; u suprotnom je lakša.
- Ako grupe **a** i **b** nisu jednak teške, onda je u jednoj od njih lažna kovanica, pa su sve kovanice u grupci **c** prave. Uzmemo bilo koje 33 kovanice iz grupe **c** i usporedimo njihovu težinu s težinom teže grupe (uzmimo da je to grupa **a**). Ako su težine jednak, onda je lažna kovanica u grupi **b** i ona je lakša od ostalih. A ako je grupa **a** teža od ove 33 kovanice iz grupe **c**, onda je lažna kovanica u njoj i ona je također teža.

Zadatak 12.



Čarobnjak je Dori pokazao 12 novčića jednakog izgleda. Svi su bili jednako teški, osim jednog lažnog koji je bio ili lakši ili teži od ostalih. Može li Dora naći lažni novčić koristeći vagu samo 3 puta?

Rješenje (1. način)

Može. Treba učiniti sljedeće:

Novčiće označimo rednim brojevima i podijelimo ih u 3 grupe: grupa A sadrži novčice 1, 2, 3, 4; grupa B novčice 5, 6, 7, 8; a grupa C novčice 9, 10, 11, 12.

1. vaganje: Usporedimo grupe A i B.

• Ako su im težine jednake, tada su prvih 8 novčića pravi.

2. vaganje: Bilo koja 2 prava novčića usporedimo s novčićima 9 i 10.

Ako su im težine jednake, onda je lažni novčić 11 ili 12;

a ako im težine nisu jednake, onda je lažni novčić 9 ili 10.

3. vaganje: Usporedimo jedan od dva "osumnjičena" novčića s jednim pravim da bismo otkrili koji je od "osumnjičenih" lažni.

• Ako grupe A i B nisu jednako teške, tada su svi novčići iz grupe C pravi. Pretpostavimo da je grupa A teža od grupe B. Lažni novčić je ili u grupi A (u tom slučaju on je teži od ostalih) ili u grupi B (u tom slučaju on je lakši od ostalih).

2. vaganje: Stavimo novčice 1, 2, 3, 5 na jednu stranu vase, a novčice 4, 9, 10, 11 na drugu stranu.

Ako su jednakog teži, onda je lažni novčić 6, 7 ili 8, i on je lakši od ostalih. Pronaći ćemo ga u skladu s rješenjem 1. zadatka iz ove prezentacije (samo jednim vaganjem).

Ako je grupa (1,2,3,5) teža, onda je lažni novčić 1, 2 ili 3, i on je teži od ostalih (ponovo ga možemo pronaći u skladu s rješenjem 1. zadatka).

Ako je grupa (1,2,3,5) lakša, tada je lažni novčić ili 5 ili 4, a pronaći ćemo ga tako da bilo kojeg od njih usporedimo s bilo kojim pravim novčićem (3. vaganje).

Rješenje (2. način)

Postoji još jedan način za pronalaženje lažnog novčića.

1. vaganje:

Usporedi težine grupa (1,2,3,10) i (4,5,6,11).

2. vaganje:

Usporedi težine grupa (1,2,3,11) i (7,8,9,10).

3. vaganje:

Usporedi težine grupa (1,4,7,10) i (2,5,8,12).

Nakon toga Dora može reći koji je novčić lažni.

Razmisli: Koji će biti rezultati vaganja ako je 1. novčić lažan? A ako je 2. novčić lažan? A treći? Itd.

Autorica prezentacije:

Inna Shapiro

Originalnu prezentaciju na engleskom jeziku
možete naći na:

<http://www.raisesmartkids.net/>

Prevela s engleskog: *Antonija Horvatek*

Najtoplje zahvalujem kolegici Inni Shapiro na dopuštenju da
ovu prezentaciju stavim na svoje web stranice.

Antonija Horvatek

Matematika na dlani

<http://www.antonija-horvatek.from.hr/>